練習問題 1-A

1.

（１）与式 $= \displaystyle\int_{-1}^{3}\left\{\int_{1}^{4} x^2\sqrt{y}dy\right\}dx$

$$= \int_{-1}^{3}\left[x^2\cdot\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}\right]_1^4 dx$$

$$= \frac{2}{3}\int_{-1}^{3} x^2\left[y\sqrt{y}\right]_1^4 dx$$

$$= \frac{2}{3}\int_{-1}^{3} x^2\left(4\sqrt{4}-1\sqrt{1}\right)dx$$

$$= \frac{2}{3}\cdot 7\int_{-1}^{3} x^2 dx$$

$$= \frac{14}{3}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{3}$$

$$= \frac{14}{3}\left(9+\frac{1}{3}\right)$$

$$= \frac{14}{3}\cdot\frac{28}{3} = \boldsymbol{\frac{392}{9}}$$

（２）与式 $= \displaystyle\int_{0}^{1}\left\{\int_{1}^{2}\frac{y}{(x+y)^2}dx\right\}dy$

$$= \int_0^1\left[-\frac{y}{x+y}\right]_1^2 dy$$

$$= \int_0^1\left\{-\frac{y}{2+y}-\left(-\frac{y}{1+y}\right)\right\}dy$$

$$= \int_0^1\left\{-\frac{y}{y+2}+\frac{y}{y+1}\right\}dy$$

$$= \int_0^1\frac{-y(y+1)+y(y+2)}{(y+2)(y+1)}dy$$

$$= \int_0^1\frac{-y^2-y+y^2+2y}{(y+2)(y+1)}dy$$

$$= \int_0^1\frac{y}{(y+2)(y+1)}dy$$

$$= \int_0^1\left(\frac{2}{y+2}-\frac{1}{y+1}\right)dy$$ ※部分分数分解

$$= \Big[2\log|y+2|-\log|y+1|\Big]_0^1$$

$$= 2\log 3-\log 2-(2\log 2-\log 1)$$

$$\boldsymbol{= 2\log 3-3\log 2=\log\frac{9}{8}}$$

※部分分数分解の解説

$\dfrac{y}{(y+2)(y+1)} = \dfrac{a}{y+2}+\dfrac{b}{y+1}$ とする．

両辺に$(y+2)(y+1)$をかける．

$y = a(y+1)+b(y+2)$

整理すると

$y = ay+a+by+2b$

$y = (a+b)y+a+2b$

両辺の係数を比較すると，次の方程式が得られる．

$$\begin{cases} a+b=1 \\ a+2b=0 \end{cases}$$

この連立方程式を解くと，$a=2$，$b=-1$

よって，$\dfrac{y}{(y+2)(y+1)} = \dfrac{2}{y+2}+\dfrac{-1}{y+1}$

（３）与式 $= \displaystyle\int_0^1\left\{\int_{x^2}^{x}(3y^2-2xy)dy\right\}dx$

$$= \int_0^1\left[y^3-xy^2\right]_{x^2}^{x}dx$$

$$= \int_0^1\{x^3-x^3-(x^6-x^5)\}dx$$

$$= \int_0^1(-x^6+x^5)dx$$

$$= \left[-\frac{1}{7}x^7+\frac{1}{6}x^6\right]_0^1$$

$$= -\frac{1}{7}+\frac{1}{6}$$

$$= \frac{-6+7}{42} = \boldsymbol{\frac{1}{42}}$$

（４）与式 $= \displaystyle\int_1^2\left\{\int_{y^2}^{4}\frac{y}{x^2}dx\right\}dy$

$$= \int_1^2\left[-\frac{y}{x}\right]_{y^2}^{4}dy$$

$$= \int_1^2\left\{-\frac{y}{4}-\left(-\frac{1}{y}\right)\right\}dy$$

$$= \int_1^2\left(-\frac{y}{4}+\frac{1}{y}\right)dy$$

$$= \left[-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}y^2+\log|y|\right]_1^2$$

$$= -\frac{1}{2} + \log 2 - \left(-\frac{1}{8} + \log 1\right)$$

$$= -\frac{1}{2} + \log 2 + \frac{1}{8}$$

$$= \boldsymbol{\log 2 - \frac{3}{8}}$$

（５）与式 $= \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \left\{\int_{-2x}^{x} \sin(2x + y)\, dy\right\} dx$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \Big[-\cos(2x+y)\Big]_{-2x}^{x} dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \{-\cos 3x - (-\cos 0)\} dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} (-\cos 3x + 1) dx$$

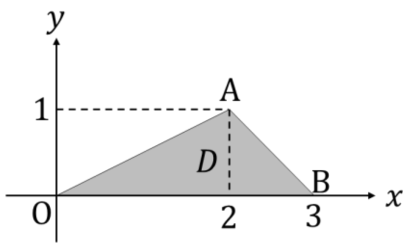
$$= \left[-\frac{1}{3}\sin 3x + x\right]_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$= -\frac{1}{3}\sin \pi + \frac{\pi}{3} - \left(-\frac{1}{3}\sin 0 + 0\right)$$

$$= -\frac{1}{3}\cdot 0 + \frac{\pi}{3} = \boldsymbol{\frac{\pi}{3}}$$

2.

下の図のように，頂点を定める．



直線 OA の式は，$y = \frac{1}{2}x$であるから，$x = 2y$

直線 AB の式は，$y = -x + 3$であるから，$x = -y + 3$

よって，領域Dは，次の不等式によってあらわすことができる．

$0 \leqq y \leqq 1$，$2y \leqq x \leqq -y + 3$

したがって

与式 $= \displaystyle\int_0^1 \left\{\int_{2y}^{-y+3} y dy\right\} dy$

$$= \int_0^1 \Big[yx\Big]_{2y}^{-y+3} dy$$

$$= \int_0^1 y\{-y + 3 - 2y\} dy$$

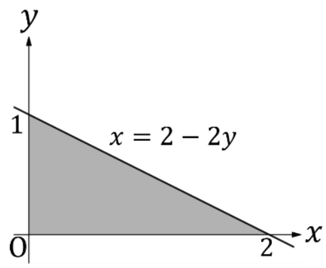
$$= \int_0^1 (-3y^2 + 3y) dy$$

$$= \left[-y^3 + \frac{3}{2}y^2\right]_0^1$$

$$= -1 + \frac{3}{2} = \boldsymbol{\frac{1}{2}}$$

3.

（１）領域を図示すると



$x = 2 - 2y$（$0 \leqq y \leqq 1$）より，$y = 1 - \frac{1}{2}x$であるから

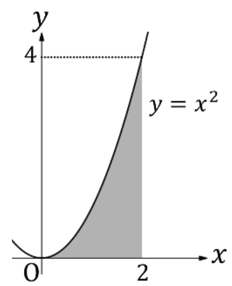
領域は次の不等式によって表すことができる．

$0 \leqq x \leqq 2$，$0 \leqq y \leqq 1 - \frac{1}{2}x$

よって

与式 $= \boldsymbol{\displaystyle\int_0^2 \left\{\int_0^{1-\frac{1}{2}x} f(x,\ y) dy\right\} dx}$

（２）領域を図示すると



$y = x^2$（$0 \leqq x \leqq 2$）より，$x = \sqrt{y}$であるから，

領域は次の不等式によって表すことができる．

$\sqrt{y} \leqq x \leqq 2$，$0 \leqq y \leqq 4$

よって

与式 $= \boldsymbol{\displaystyle\int_0^4 \left\{\int_{\sqrt{y}}^{2} f(x,\ y) dx\right\} dy}$

4.

$x = 0$と$x = 2$で囲まれているから，$0 \leqq x \leqq 2$

$y = 0$と$y = 9$で囲まれているから，$0 \leqq y \leqq 9$

よって，領域は，$0 \leqq x \leqq 2$，$0 \leqq y \leqq 9$

求める体積をVとすると

$$V=\int_0^9\left\{\int_0^2 x\sqrt{y}dx\right\}dy$$

$$=\int_0^9\left[\frac{1}{2}x^2\sqrt{y}\right]_0^2dy$$

$$=\int_0^9 2\sqrt{y}dy$$

$$=2\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^9$$

$$=\frac{4}{3}\cdot 9\sqrt{9}=\mathbf{36}$$

5.

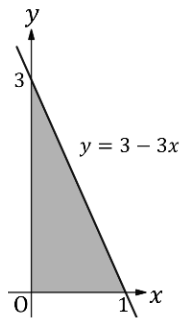
$z=(x+y)^2\geqq 0$

よって，曲面は，xy平面の上側になる．

また，$3x+y=3$より，$y=3-3x$であるから，

領域Dは，$0\leqq x\leqq 1$，$0\leqq y\leqq 3-3x$

で表されるから，求める立体の体積をVとすると



$$V=\int_0^1\left\{\int_0^{3-3x}(x+y)^2dy\right\}dx$$

$$=\int_0^1\left[\frac{1}{3}(x+y)^3\right]_0^{3-3x}dx$$

$$=\frac{1}{3}\int_0^1\{(x+3-3x)^3-x^3\}dx$$

$$=\frac{1}{3}\int_0^1\{(-2x+3)^3-x^3\}dx$$

$$=\frac{1}{3}\left[\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{-2}(-2x+3)^4-\frac{1}{4}x^4\right]_0^1$$

$$=\frac{1}{12}\left[-\frac{1}{2}(-2x+3)^4-x^4\right]_0^1$$

$$=\frac{1}{12}\left\{-\frac{1}{2}\cdot 1^4-1^4-\left(-\frac{1}{2}\cdot 3^4+0\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{12}\cdot\left(-\frac{3}{2}+\frac{81}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{12}\cdot\frac{78}{2}=\mathbf{\frac{13}{4}}$$

練習問題 1-B

1.

（1）$y=-x^2+2x$

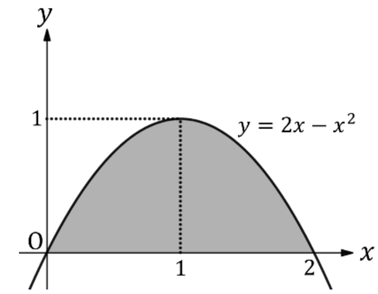
$=-(x^2-2x)$

$=-(x-1)^2+1$

また，$2x-x^2=0$より，$x(2-x)=0$であるから，

曲線とx軸との交点のx座標は，$x=0$，2

領域を図示すると



この領域は次の不等式によって表すことができる．

$0\leqq x\leqq 2$，$0\leqq y\leqq 2x-x^2$

よって

$$与式=\int_0^2\left\{\int_0^{2x-x^2}x\,dy\right\}dx$$

$$=\int_0^2\left[xy\right]_0^{2x-x^2}dx$$

$$=\int_0^2 x(2x-x^2)dx$$

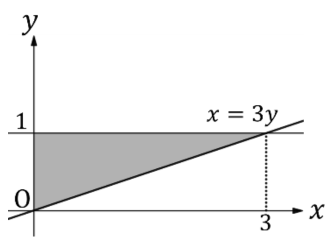
$$=\int_0^2(2x^2-x^3)dx$$

$$=\left[\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4\right]_0^2$$

$$=\frac{2}{3}\cdot 2^3-\frac{1}{4}\cdot 2^4$$

$$=\frac{16}{3}-4=\mathbf{\frac{4}{3}}$$

（2）領域を図示すると



よって

$$与式=\int_0^1\left\{\int_0^{3y}\sqrt{x+y}dx\right\}dy$$

$$=\int_0^1\left[\frac{2}{3}(x+y)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{3y}dy$$

$$= \frac{2}{3}\int_0^1 \left\{(4y)^{\frac{3}{2}} - y^{\frac{3}{2}}\right\} dy$$

$$= \frac{2}{3}\int_0^1 \left(4^{\frac{3}{2}}y^{\frac{3}{2}} - y^{\frac{3}{2}}\right) dy$$

$$= \frac{2}{3}\int_0^1 \left(8y^{\frac{3}{2}} - y^{\frac{3}{2}}\right) dy$$

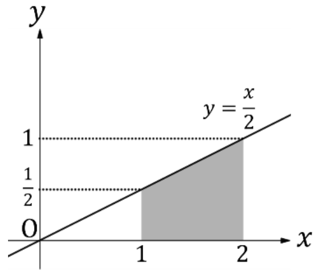
$$= \frac{2}{3}\int_0^1 7y^{\frac{3}{2}} dy$$

$$= \frac{14}{3}\left[\frac{2}{5}y^{\frac{5}{2}}\right]_0^1$$

$$= \frac{14}{3}\left[\frac{2}{5}\sqrt{y^5}\right]_0^1$$

$$= \frac{14}{3}\cdot\frac{2}{5} = \boldsymbol{\frac{28}{15}}$$

（３）領域を図示すると



よって

$$\text{与式} = \int_1^2 \left\{\int_0^{\frac{x}{2}} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} dy\right\} dx$$

$$= \int_1^2 x\left[\sin^{-1}\frac{y}{x}\right]_0^{\frac{x}{2}} dx \quad \text{※}x > 0 \text{ より}$$

$$= \int_1^2 x\left(\sin^{-1}\frac{1}{2} - \sin^{-1} 0\right) dx$$

$$= \int_1^2 x\cdot\frac{\pi}{6} dx$$

$$= \frac{\pi}{6}\int_1^2 x\, dx$$

$$= \frac{\pi}{6}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_1^2$$

$$= \frac{\pi}{12}(2^2 - 1^2)$$

$$= \frac{\pi}{12}\cdot 3 = \boldsymbol{\frac{\pi}{4}}$$

2.

曲線と半円の交点のx座標を求めると

$$x^2 + (x^2)^2 = 2$$

$$x^2 + x^4 = 2$$

$$x^4 + x^2 - 2 = 0$$

$X = x^2$（$X > 0$）とおくと

$$X^2 + X - 2 = 0$$

$$(X+2)(X-1) = 0$$

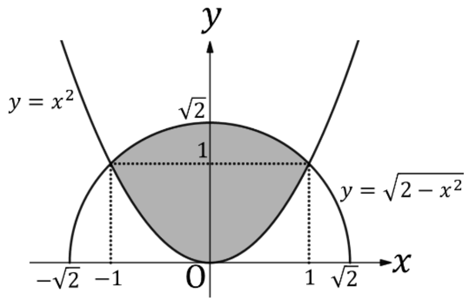
$X > 0$より，$X = 1$

よって，$x^2 = 1$であるから，$x = \pm 1$

$x^2 + y^2 = 2$より，$y^2 = 2 - x$

$y \geqq 0$より，$y = \sqrt{2 - x^2}$（$-1 \leqq x \leqq 1$）

曲線と半円で囲まれた領域を図示すると



曲線（$y = x^2$）の上部の領域であるから，

$y \geqq x^2$・・・①

また，半円（$y \leqq \sqrt{2 - x^2}$）の内部の領域であるから，

$y \leqq \sqrt{2 - x^2}$・・・②

①，②より，$\sqrt{2 - x^2} \leqq y \leqq x^2$

よって，領域Dは次の不等式で表される．

$-1 \leqq x \leqq 1$，$\sqrt{2 - x^2} \leqq y \leqq x^2$

したがって

$$\text{与式} = \int_{-1}^1 \left\{\int_{x^2}^{\sqrt{2-x^2}} y\, dy\right\} dx$$

$$= \int_{-1}^1 \left[\frac{1}{2}y^2\right]_{x^2}^{\sqrt{2-x^2}} dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-1}^1 \left\{\left(\sqrt{2 - x^2}\right)^2 - (x^2)^2\right\} dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-1}^1 (2 - x^2 - x^4) dx$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 2\int_0^1 (2 - x^2 - x^4) dx \quad \text{※被積分関数が偶関数}$$

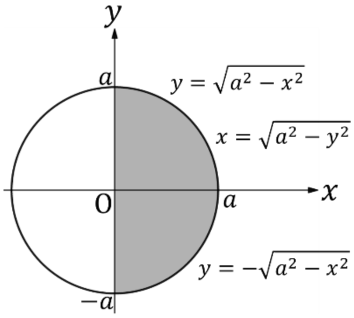
$$= \int_0^1 \left[2x - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{5}x^5\right]_0^1$$

$$= 2 - \frac{1}{3} - \frac{1}{5}$$

$$= \frac{30 - 5 - 3}{15} = \boldsymbol{\frac{22}{15}}$$

3.

領域は，$-a \leqq y \leqq a$，$0 \leqq x \leqq \sqrt{a^2-y^2}$であるから，これを図示すると



$x=\sqrt{a^2-y^2}$より，$y=\pm\sqrt{a^2-x^2}$

よって，領域は次の不等式によって表すことができる．

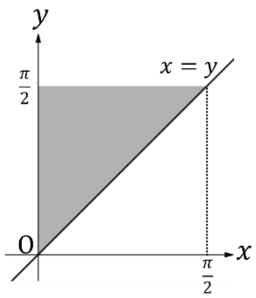
$0 \leqq x \leqq a$，$-\sqrt{a^2-x^2} \leqq y \leqq \sqrt{a^2-x^2}$

したがって

$$\text{与式} = \boldsymbol{\int_0^a \left\{\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} f(x,\ y)dy\right\} dx}$$

4.

xy平面を図示すると



よって，領域は，$0 \leqq y \leqq \dfrac{\pi}{2}$，$0 \leqq x \leqq y$であるから，

求める体積をVとすると

$$V = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{\int_0^y \cos x\,dx\right\} dy$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big[\sin x\Big]_0^y dy$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin y - \sin 0) dy$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin y\,dy$$

$$= \Big[-\cos y\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= -\cos\frac{\pi}{2} - (-\cos 0)$$

$$= \cos 0 = \mathbf{1}$$

【別解】※積分順序の変更

図より，領域は，$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$，$x \leqq y \leqq \dfrac{\pi}{2}$であるから，

求める体積をVとすると

$$V = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{\int_x^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dy\right\} dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \Big[y\Big]_x^{\frac{\pi}{2}} dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot \left(\frac{\pi}{2} - x\right) dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2}\cos x - x\cos x\right) dx$$

部分積分を用いて

$$\int x\cos x\,dx = x\sin x - \int 1\cdot\sin x\,dx$$

$$= x\sin x + \cos x$$

であるから

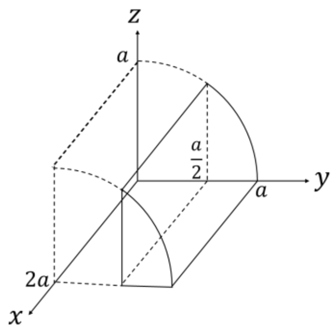
$$V = \left[\frac{\pi}{2}\sin x - (x\sin x + \cos x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \left[\frac{\pi}{2}\sin x - x\sin x - \cos x\right]$$

$$= \left(\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2} - \cos\frac{\pi}{2}\right) - (0 - 0 - \cos 0)$$

$$= 0 - (-1) = \mathbf{1}$$

5.



領域は，$0 \leqq x \leqq 2a$，$\dfrac{a}{2} \leqq y \leqq a$であるから，

求める体積をVとすると

$$V = \int_0^{2a} \left\{\int_{\frac{a}{2}}^{a} \sqrt{a^2-y^2}dy\right\} dx$$

$$= \int_0^{2a} \left[\frac{1}{2}\left(y\sqrt{a^2-y^2} + a^2\sin^{-1}\frac{y}{a}\right)\right]_{\frac{a}{2}}^{a} dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2a} \left\{a^2\sin^{-1}1 - \left(\frac{a}{2}\sqrt{a^2-\frac{a^2}{4}} + a^2\sin^{-1}\frac{1}{2}\right)\right\} dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2a}\left\{a^2\cdot\frac{\pi}{2}-\left(\frac{a}{2}\sqrt{\frac{3}{4}a^2}+a^2\cdot\frac{\pi}{6}\right)\right\}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2a}\left(\frac{\pi}{2}a^2-\frac{\sqrt{3}}{4}a^2-\frac{\pi}{6}a^2\right)dx \quad ※a>0\text{ より}$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2a}\left(\frac{\pi}{3}a^2-\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\right)dx$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{3}a^2-\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\right)\int_0^{2a}dx$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{3}a^2-\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\right)\Big[x\Big]_0^{2a}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{3}a^2-\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\right)\cdot 2a$$

$$=\frac{\pi}{3}a^3-\frac{\sqrt{3}}{4}a^3$$

$$=\boldsymbol{\frac{4\pi-3\sqrt{3}}{12}a^3}$$

※ $\int_{\frac{a}{2}}^{a}\sqrt{a^2-y^2}dy$ の求め方の別解

$y=a\sin\theta$ とおくと，$dy=a\cos\theta\,d\theta$

また，y と θ の対応は

y	$\frac{a}{2}$	$\rightarrow$	a
θ	$\frac{\pi}{6}$	$\rightarrow$	$\frac{\pi}{2}$

よって

$$\int_{\frac{a}{2}}^{a}\sqrt{a^2-y^2}dy=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{a}{2}}\sqrt{a^2-a^2\sin^2\theta}\cdot a\cos\theta\,d\theta$$

$$=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{a}{2}}a\sqrt{a^2(1-\sin^2\theta)}\cos\theta\,d\theta$$

$$=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{a}{2}}a\sqrt{a^2\cos^2\theta}\cos\theta\,d\theta$$

ここで，$a>0$，$\frac{\pi}{6}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}$ で，$\cos\theta>0$ であるから，

$\sqrt{a^2\cos^2\theta}=a\cos\theta$

よって

$$\int_{\frac{a}{2}}^{a}\sqrt{a^2-y^2}dy=a^2\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\,d\theta$$

$$=a^2\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2\theta}{2}d\theta$$

$$=\frac{a^2}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2\theta)d\theta$$

$$=\frac{a^2}{2}\left[\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{a^2}{2}\left\{\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\cos\pi\right)-\left(\frac{\pi}{6}+\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{3}\right)\right\}$$

$$=\frac{a^2}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$$

$$=\frac{a^2}{2}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$$

$$=\frac{a^2}{24}(4\pi-3\sqrt{3})$$